

УДК 519.63:533:537

Д.А. Тукмаков¹, Н.А. Тукмакова²

¹Институт механики и машиностроения
Федеральный исследовательский центр

"Казанский научный центр Российской академии наук"

Республика Татарстан, 420111, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31
tukmakovDA@imm.knc.ru; (843) 292-76-14

²Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева (КНИТУ-КАИ).

Республика Татарстан, 420111, г. Казань, ул. К. Маркса, д. 10
(843) 231-01-50

**СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ
ФИЗИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ
ПО НЕЛИНЕЙНЫМ КОЛЕБАНИЯМ АЭРОЗОЛЯ
В АКУСТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРАХ С ЧИСЛЕННЫМИ
РАСЧЕТАМИ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ ГЕТЕРОГЕННОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

Сопоставлены результаты численных и физических экспериментов по исследованию динамики газовзвесей в волновых полях. Математическая модель монодисперсной газовзвеси учитывала силовое и тепловое взаимодействие несущей и дисперсной компонент смеси, а также вязкость, сжимаемость и теплопроводность несущей среды, в качестве которой рассматривался газ. Система уравнений динамики газовзвеси решалась численно явным конечно-разностным методом второго порядка точности. Результаты расчетов сопоставлены с известными из литературы экспериментальными данными.

Ключевые слова: многофазные среды; монодисперсная модель динамики аэрозоля; акустический резонатор; уравнение Навье–Стокса; численное моделирование.

Введение

Процессы, связанные с динамикой многофазных сред широко распространены в природе и технике [1–4]. В связи с различными практическими приложениями представляет интерес задача исследования динамики неоднородных сред различной дисперсности в волновых полях [5–7]. При этом изучение нестационарных и волновых течений в многофазных средах методами математического моделирования востребовано в связи с тем, что многие явления и процессы в таких системах не описаны экспериментально. При изучении динамики газа с твердыми или жидкими включениями широко используется континуальная математическая модель, предполагающая описание многофазной среды как набора нескольких сплошных сред – "континуумов" имеющих собственные поля скоростей, температуру, плотность и взаимодействующих друг с другом через передачу импульса и тепла.

В данной работе используется математическая модель динамики аэрозоля, основанная на концепции взаимопроникающих континуумов, включающих в себя дисперсную фракцию и несущую фазу с учетом ее вязкости, сжимаемости и теплопроводности.

Математическая модель

В качестве несущей среды рассматривается сжимаемый газ, движение которого описывается системой уравнений Навье–Стокса [1, 2], учитывающих межфазный обмен импульсом и энергией с дисперсной фазой. В цилиндрической системе координат в осесимметричном случае система уравнений выглядит следующим образом [2]:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial y} = -\rho_1 v_1 / y,$$

$$\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy}) = -(\rho_1 u_1 v_1 + \tau_{xy}) / y + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} - F_x,$$

$$\frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 v_1^2 + p - \tau_{yy}) = -(\rho_1 v_1^2 - \tau_{yy}) / y + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial y} - F_y,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left([e_1 + p - \tau_{xx}] u_1 - \tau_{xy} v_1 + \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left([e_1 + p - \tau_{yy}] v_1 - \tau_{xy} u_1 + \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) = \\ = - \left(v_1 (e_1 + (1 - \alpha_2) p - \tau_{yy}) - \tau_{xy} u_1 - \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) / y + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} (u_1 p) + \\ + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} (v_1 p) + Q - |F_x| (u_1 - u_2) - |F_y| (v_1 - v_2), \end{aligned}$$

$$p = (\gamma - 1)(e_1 - \rho_1(u_1^2 + v_1^2) / 2), \quad e_1 = \rho_1 I + \rho_1(u_1^2 + v_1^2) / 2, \quad I = C_V T,$$

$$\tau_{xx} = \mu_1 \left(2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right),$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{v_1}{y}.$$

Здесь ρ_1 , u_1 , v_1 , u_2 , v_2 , e_1 , λ_1 , μ_1 – плотность, составляющие скорости несущей и дисперсной среды, полная энергия, коэффициенты теплопроводности и вязкости несущей среды. Величины F_x , F_y , Q задаются законами межфазного трения и теплообмена. $I = C_V T_1 = RT_1 / (\gamma - 1)$ – внутренняя энергия газа.

Движение дисперсной фазы описывается уравнением сохранения средней плотности твердой фракции, уравнениями сохранения составляющих импульса и уравнением сохранения тепловой энергии [2]:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_2 v_2)}{\partial y} = -\rho_2 v_2 / y,$$

$$\frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 u_2^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_2 u_2 v_2) = -\rho_2 u_2 v_2 / y + F_x + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial(\rho_2 v_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 u_2 v_2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_2 v_2^2) = -\rho_2 v_2^2 / y + F_y + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial(e_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (e_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial y} (e_2 v_2) = -e_2 v_2 / y + Nu \frac{6 \alpha_2}{(2r)^2} \lambda_1 (T_1 - T_2),$$

$$\rho_2 = \alpha_2 \rho_{20}, \quad e_1 = \rho_2 C_{p2} T_2,$$

где T_2 , e_2 , ρ_2 , α_2 – температура дисперсной фазы, внутренняя энергия дисперсной фазы, средняя плотность и объемное содержание; C_{2p} , α_{20} – теплоемкость и плотность вещества твердой фазы.

Составляющие силы трения F_x и F_y задаются следующим образом [1, 2]:

$$F_x = \frac{3}{4} \frac{\alpha_2}{(2r)} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} (u_1 - u_2) + \\ + \alpha_2 \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \\ + 0.5 \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - v \right),$$

$$F_y = \frac{3}{4} \frac{\alpha_2}{(2r)} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} (v_1 - v_2) + \\ + \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \\ + 0.5 \alpha_2 \rho_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right),$$

$$C_d = \frac{24}{Re_{21}} + \frac{4}{Re_{21}^{0.5}} + 0.4, M_{21} = |\bar{V}_1 - \bar{V}_2| / c,$$

$$V_1 = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}, V_2 = \sqrt{u_2^2 + v_2^2},$$

$$Re_{21} = \rho_1 |\bar{V}_1 - \bar{V}_2| 2r / \mu, Pr = \gamma C_p \mu_1 / \lambda_1, 0 \leq M_{21} \leq 2, 0 \leq Re_{21} < 2 \cdot 10^5.$$

Температура несущей среды находится из уравнения: $T_1 = (\gamma - 1)(e_1 / \rho_1 - 0.5(u_1^2 + v_1^2)) / R$. Тепловая энергия взвешенной в газе твердой фазы определяется как $e_2 = \rho_2 C_{p2} T_2$.

В уравнение энергии для несущей фазы входит коэффициент теплопроводности газа λ и тепловой поток за счет теплообмена между газом и частицей [2]:

$$Q = \alpha^T 4 \pi r^2 (T_1 - T_2) n = 3 \alpha_2 \alpha^T 4 \pi r^2 (T_1 - T_2) / 4 \pi r^3 = \\ = 3 \alpha_2 \alpha^T (T_1 - T_2) / r = 6 \alpha_2 Nu \lambda_1 (T_1 - T_2) / (2r)^2,$$

где $Nu=2r\alpha^T/\lambda_1$ – число Нуссельта, n – концентрация частиц.

Математическая модель дополнялась начальными и граничными условиями, варьируемыми в зависимости от вида задачи. Полученная система дифференциальных уравнений в частных производных решалась явным конечно-разностным методом Мак-Кормака [8, 10–11, 14–15] с расщеплением по пространственным направлениям [9] и схемой нелинейной коррекции [12].

Постановка задачи

Рассмотрим динамику монодисперсного аэрозоля при резонансных режимах колебаний несущей среды в закрытой и открытой цилиндрической трубе, продольные колебания в которой возбуждаются поршнем, перемещающимся по гармоническому закону.

Аэрозоль в начальный момент времени представляет собой смесь воздуха с равномерно распределенными в объеме резонатора частицами – сферами одинакового диаметра с фиксированной плотностью вещества.

Предполагалось, что в моменты времени, предшествующие началу колебаний поршня, аэрозоль неподвижен, температуры фаз равны $T_{10}=T_{20}$, заданы плотность воздуха, вещества дисперсной фазы и ее объемное содержание a_2 .

При $t=0$ поршень начинал движение по гармоническому закону $x(t)=a\cdot\sin(\omega t)$, где ω – одна из резонансных частот продольных колебаний несущей среды, a – амплитуда хождения поршня.

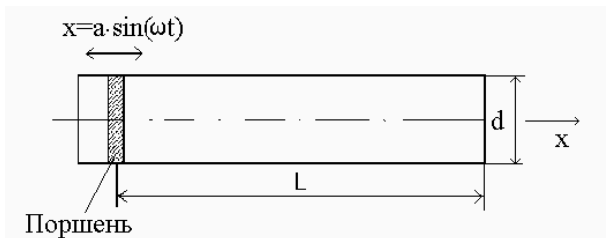


Рис. 1. Схема резонатора

В процессе численного решения системы уравнений на неподвижных поверхностях для скоростей фаз задавались однородные граничные условия первого рода, а для остальных газодинамических функций однородные граничные условия второго рода. На поверхности поршня осевая составляющая скорости изменялась по гармоническому закону, радиальная составляющая скорости приравнивалась нулю.

В приведенных ниже численных расчетах в осевом направлении задавалось 350 узлов, а в радиальном направлении – 90 узлов.

Результаты расчетов

Начальная температура газа и дисперсной среды составляли $T_0=293^{\circ}\text{K}$. Вещество, из которого состоят капли аэрозоль – диэтилгексилсебакат (DEHS), использованный в физическом эксперименте [16].

Объемное содержание дисперсной фазы – $\alpha_2=1.2\cdot 10^{-5}$, истинная плотность – $\rho_2=800\text{ кг/м}^3$, радиус частиц составлял $r=0.8\text{ мкм}$.

Частота колебаний поршня выбирались равной частоте первого линейного резонанса в закрытой трубе – $\nu_1 = \frac{c}{2L}$ [7], где c – скорость звука.

Длина резонатора составляла $L=1.06\text{ м}$. Расчеты, как и эксперимент [16], проводились при амплитудах хождения поршня $a=0.3\text{ мм}$ и $a=0.1\text{ мм}$.

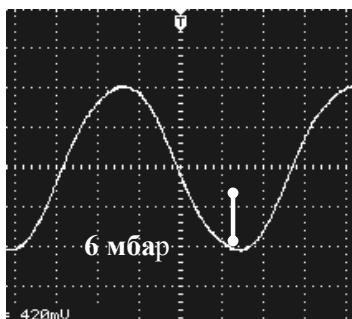
Внутренний диаметр закрытого акустического резонатора составлял $d=0.036\text{ м}$.

На рис. 2 (*а*, *б*) представлены зависимости от времени изменения давления на закрытом конце акустического резонатора.

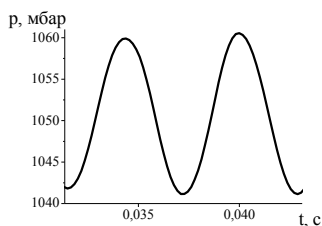
Результат физического эксперимента, полученный при амплитуде колебания поршня $a=0.3\text{ мм}$, показан на рис. 2, *а*, численного расчета – на рис. 2, *б*.

Амплитуда изменения давления в физическом эксперименте составила $(p_{\max}-p_{\min})\approx 12\text{ мбар}$.

В численных расчетах, проведенных для аналогичной колебательной системы амплитуда изменения давления на временном интервале между $t = 0.3125$ с и $t = 0.0375$ с составляла $(p_{\max} - p_{\min}) \approx 9.6$ мбар.



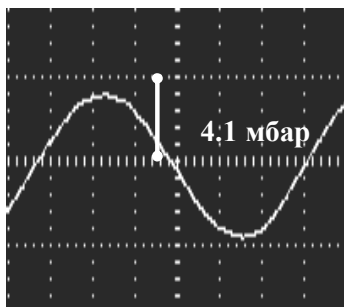
a



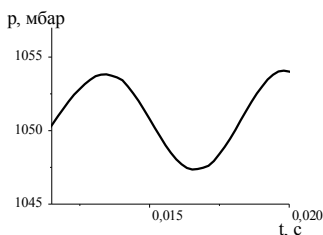
б

Рис. 2. Зависимость давления на закрытом конце трубы от времени для амплитуды хождения поршня $a = 0.3$ мм: *a* – физический эксперимент; *б* – численный расчет

Зависимости давления от времени на закрытом конце трубы, для амплитуды колебаний $a=0.1$ мм изображены на рис. 3, *a*, *б*: экспериментальная на рис. 3, *a*, полученная численно – на рис. 3, *б*. Амплитуда изменения давления на закрытом конце трубы в этом случае в экспериментальной работе составила $(p_{\max} - p_{\min}) \approx 8$ мбар, тогда как в численных расчетах на временном интервале между $t = 0.0125$ с и $t = 0.1875$ с эта величина составила $(p_{\max} - p_{\min}) \approx 6$ мбар.



а



б

Рис. 3. Зависимость давления на закрытом конце трубы от времени для амплитуды хождения поршня $a=0.1$ мм: а – физический эксперимент; б – численный расчет

Проведенные расчеты показали, что амплитуда изменения давления в численной модели меньше, чем в физической колебательной системе, что можно объяснить влиянием схемной вязкости. Также, можно отметить, что отклонение результатов численного расчета от результатов физического эксперимента увеличивается по мере уменьшения амплитуды возбуждения акустических колебаний.

Библиографический список

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. Наука, 1987. 464 с.
2. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб: Недра, 2003. 284 с.

3. *Стернин Л.Е.* Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. Машиностроение, 1980. 176 с.

4. *Вараксин А.В.* Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения // Теплофизика высоких температур. 2013, № 3. С. 421–455.

5. *Temkin S.* Suspension acoustics: An introduction to the physics of suspension / S. Temkin / Cambridge University Press, 2005. 398 p.

6. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 403 с.

7. *Ilgatov M.A., Zaripov R.G., Galiullin R.G., Repin V.B.* Nonlinear oscillations of a gas in a tube // Appl. Mech. Rev. 1996. Vol. 49, № 3. P. 137–154.

8. *Fletcher C.A.* Computation Techniques for Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berlin et al. 1988. 502 p.

9. *Ковеня В.М., Тарнавский Г.А., Черный С.Г.* Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1990. 247 с.

10. *Steger J.L.* Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries // AIAA J. 1978. Vol. 16, № 7. P. 679–686.

11. *MacCormack R.W., Lomax H.* Numerical solution of compressible viscous flows // R.W. MacCormack, H. Lomax // Ann Rev. Fluid Mech. 1979. № 11. P. 289–316.

12. *Музафаров И.Ф., Утюжников С.В.* Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Математическое моделирование, 1993. Т. 5, № 3. С. 74–83.

13. *Тукмаков А.Л.* Зависимость механизма дрейфа твердой частицы в нелинейном волновом поле от ее постоянной времени и длительности прохождения волновых фронтов // ПМТФ. 2011. № 4. С. 105–106.

14. *Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Тукмаков Д.А.* Ударно-волновой разлет газовзвесей // Докл. акад. наук. 2016. Т. 466, № 4. С. 418–421.

15. *Программа* для ЭВМ "Программный код для моделирования динамики однородных и дисперсных сред явным методом Мак-Кормака в обобщенных криволинейных координатах (2D)". Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018619242. Заявка № 2018616542 от 19.06.2018. Дата гос. регистрации в Реестре программ для ЭВМ 02.08.2018.

16. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А.* Резонансные колебания аэрозоля в трубе с диафрагмой в безударно-волновом режиме // ТВТ. 2014. № 6. С. 921–926.